مهروماه

به نام پروردگار مهربان

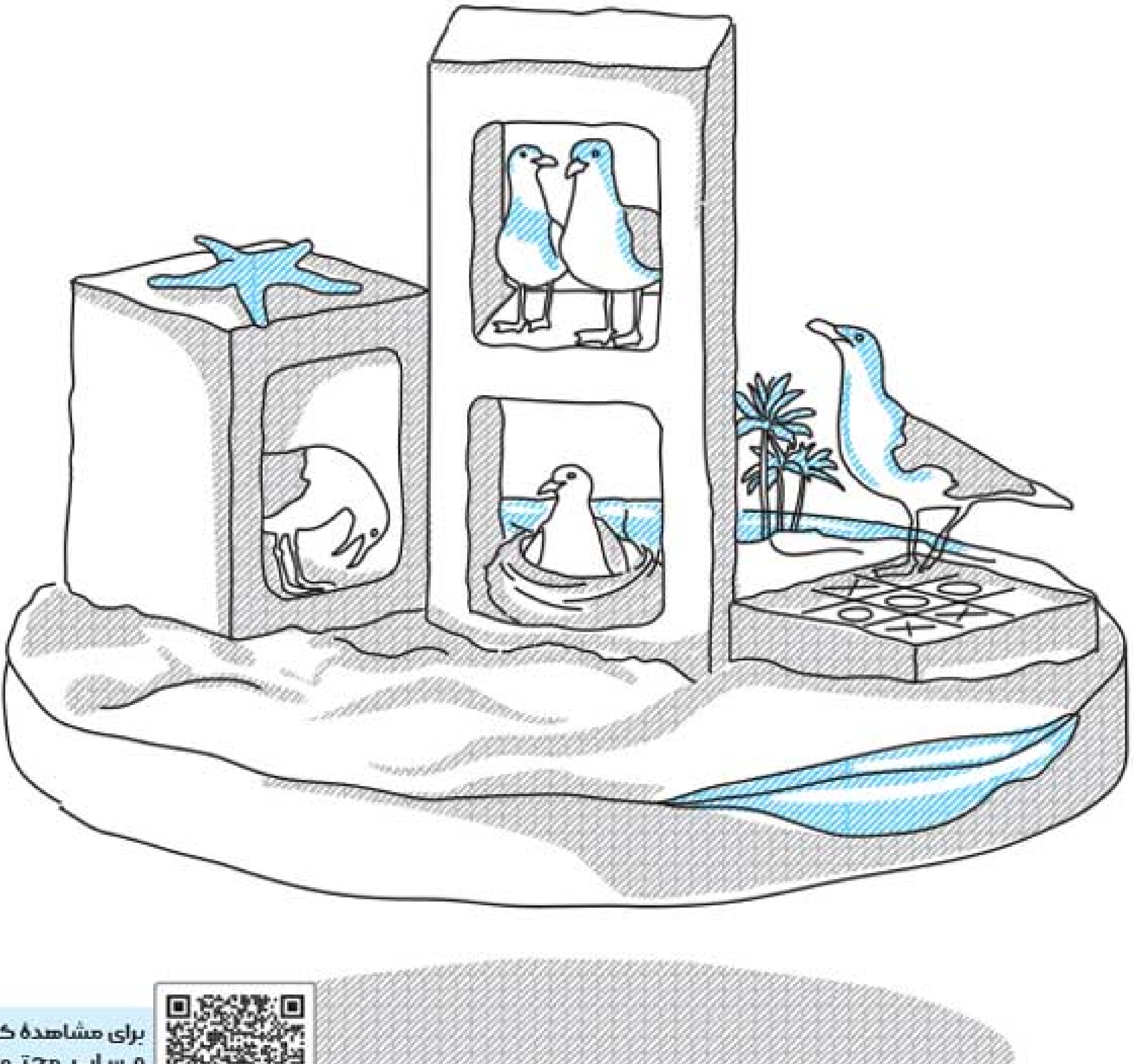
ویرایش جدید
کنکور ۱۴۰۲

ویرایش جدید

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

جامع کنکور

• جواد ترکمن • علی سعیدی‌زاد • مسعود طایفه
ناظر علمی کتاب: پیروز آل‌بویه



برای مشاهدهٔ کنکورهای ۱۴۰۱ و سایر محتواهای تکمیلی این QR code را اسکن کنید.

سرشناسه: ترکمن، جواد / عنوان و نام پدیدآور: ریاضیات گسسته و آمار و احتمال/ مشخصات نشر: تهران: مهروماه‌نو، ۱۳۹۸./ مشخصات ظاهری: مصور، جدول، نمودار؛ ۲۹×۲۲ س‌م./ فروست : کتاب جامع./ شابک: ۵-۳۷۰-۳۱۷-۶۰۰-۹۷۸ / وضعیت فهرست نویسی: فیپای مختصر./ شناسه افزوده: سعیدی زاد، علی،طایفه، مسعود/ شماره کتابشناسی ملی: ۵۴۷۵۰۰۵

ریاضیات گسسته و آمار و احتمال

ناشر: انتشارات مهروماه نو
مؤلفان: جواد ترکمن، علی سعیدی زاد، مسعود طایفه
استادان مشاور کتاب: حسین بسطام، سید مسعود طایفه، مهدی عبداللهی، مجید محمدی، رضا مهربانی
مدیر شورای تألیف: محمدحسین انوشه
ناظر علمی کتاب: استاد پیروز آل‌بویه
مدیر گروه ریاضی: عباس اشرفی
مسئول ویراستاری: آزاده غنی‌فرد
ویراستاران علمی: مهرنوش رضوی، مهدی حصاری، مهدی مرادی، وحید جعفری، امیرحسین عباسی
نوبت چاپ: ششم، ۱۴۰۱
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه
شابک: ۵-۳۷۰-۳۱۷-۶۰۰-۹۷۸

قیمت: ۲۶۰۰۰۰ تومان

مدیر تولید: مریم تاجداری
مدیر هنری: محسن فرهادی
طراح گرافیک صفحات: تایماز کاویانی
طراح جلد: حسین شیرمحمدی
مدیر فنی: میلاد صفایی
صفحه‌آرا: رویا طبسی
رسم تصاویر: مریم صابری‌برون، خاطره بهاگیر
تصویرگران: حسام طلایی، الهام اسلامی

مهروماه

نشانی: تهران، میدان انقلاب، خیابان ۱۲ فروردین، کوچهٔ مینا، پلاک ۳۴
دفتر مرکزی: ۶۶۴۰۸۴۰۰
سامانهٔ پیامکی: ۲۰۰۰۸۴۸۴
www.mehromah.ir

مرکز تماس مهروماه
۹۶۸۸۴-۰۲۱

تقدیم به پروفسور غلامرضا جهانشاهلو

پروفسور غلامرضا جهانشاهلو در روز ۲۷ اسفند سال ۱۳۲۲ در روستای سمقاور از توابع کمیجان در استان مرکزی چشم به دنیا گشود. وی مدرک ششم ابتدایی خود را در سال ۱۳۳۴ گرفت و چون هیچ دبیرستانی تا فاصلهٔ صد کیلومتری سمقاور وجود نداشت به ناچار ترک تحصیل کرد و به مدت سه سال به همراه پدرش به کار کشاورزی پرداخت. در سال ۱۳۴۳ به عنوان فارغ‌التحصیل ممتاز از دبیرستانی در شهر اراک دیپلم ریاضی خود را اخذ نمود. سپس برای تحصیل در مقطع کارشناسی رشتهٔ ریاضی فیزیک به دانشگاه فردوسی مشهد رفت و پس از اخذ مدرک کارشناسی در مؤسسهٔ ریاضیات که توسط «پروفسور مصاحب» تأسیس شده بود، پذیرفته شد. مؤسسهٔ ریاضیات اولین مرکز دانشگاهی در ایران است که به منظور تربیت مدرسین دانشگاه تأسیس شده بود. استاد جهانشاهلو دورهٔ ۲۷ ماههٔ بسیار سنگین مؤسسهٔ ریاضیات را در تابستان ۱۳۴۸ به پایان رسانده و به عنوان فارغ‌التحصیل ممتاز در دانشسرای عالی (دانشگاه خوارزمی کنونی) استخدام شد و به شغل مقدس معلمی در دانشگاه مشغول شد. ایشان در سال ۱۳۵۱ برای ادامهٔ تحصیل عازم انگلستان شد، ابتدا مدرک کارشناسی ارشد دیگری در رشتهٔ تحقیق در عملیات از دانشگاه ساوت‌همپتون دریافت نمود، سپس برای دورهٔ دکتری در زمینهٔ الگوریتم‌های مدل‌های تحقیق در عملیات به دانشگاه برونل رفت و در اردیبهشت سال ۱۳۵۵ از رسالهٔ خود دفاع کرد و به ایران بازگشت. وی در سال ۱۳۷۶ به مرتبهٔ استاد تمامی ارتقاء یافت و تا آخر عمر مفیدش به تدریس در مقاطع کارشناسی ارشد و دکتری و تألیف مقاله و کتاب پرداخت؛ ماحصل زندگی وی چاپ بیست و دو جلد کتاب و چاپ بیش از ۲۶۰ مقاله در مجلات معتبر بین‌المللی و نیز راهنمایی بیش از ۱۱۰ دانشجوی دکتری و بیش از ۳۰۰ دانشجوی کارشناسی ارشد و بیش از هزار دبیر ریاضی است. او با مقام «پدر علم تحلیل پوششی داده‌های ایران» همچون پدری دلسوز در تمام عرصه‌های زندگی و کار دانشجویان خویش را همراهی می‌کرد و تأثیر ایشان تا ابد در پیشرفت علم تحقیق در عملیات باقی خواهد ماند و روشنگر راه کسانی است که او را سرمشق و الگوی خود در زندگی و کار خود قرار می‌دهند. ایشان در روز ۱۶ فروردین سال ۱۳۹۶ دار فانی را وداع گفتند.

مجموعه - زیر مجموعه

مجموعه

مجموعه، دسته‌ای از اشیای دلخواه است که بدون هیچ ابهامی بتوان معلوم کرد که یک شیء معین در آن قرار دارد یا نه.

تست: کدام‌یک از گزاره‌های زیر بیانگر یک مجموعه نیست؟

۱) دستهٔ اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از عدد ۲۰
۲) دستهٔ اعداد اول یک رقمی
۳) دسته‌ای شامل اعداد بزرگ
۴) دستهٔ اعداد طبیعی مربع کامل بزرگ‌تر از عدد ۵۰

پاسخ (گزینه۳) **بررسی گزینه‌ها:**

در مورد گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» به ترتیب مجموعه‌های $\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$، $\{2,3,5,7\}$ و $\{64,81,100,121,...\}$ قابل قبول هستند، زیرا در مورد هر عددی می‌توان تشخیص داد که متعلق به هریک از این سه مجموعه است یا نه، اما در مورد گزینهٔ «۳»، نمی‌توان در مورد عضوهای این مجموعه تصمیم قابل قبولی گرفت. مثلاً در مورد عدد ۱۰۰۰ دقیق نمی‌توان تعیین کرد که در این دسته قرار دارد یا خیر.

هشدار: مجموعه همواره **فاقد ترتیب** و **تکرار** است.

برای نمونه: مجموعه‌های $\{a,b,c\}$، $\{c,a,b\}$، $\{a,b,b,c\}$ و $\{a,a,a,b,c\}$ همگی یکسان‌اند.

تذکر: ۱ اشیائی که با هم مجموعه را تشکیل می‌دهند، **عضو** یا **عنصرهای** آن مجموعه نامیده می‌شوند.

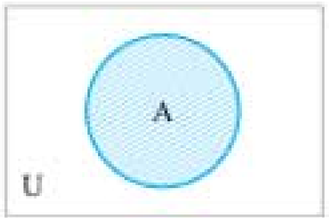
۲ اگر A یک مجموعه باشد، در صورتی که عضوی مانند x در مجموعهٔ A وجود داشته باشد، می‌نویسیم $x \in A$ و در صورتی که x متعلق به مجموعهٔ A نباشد می‌نویسیم $x \notin A$. بنابراین نماد $\in$، به معنای **عضویت** است.

تست: اگر $A=\{a,\{a\},\{\{b\}\}\}$ باشد، آن‌گاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\{a\} \in A$
۲) $a \in A$
۳) $\{b\} \in A$
۴) $\{\{b\}\} \in A$

پاسخ (گزینه۳) زیرا در مجموعهٔ A عضوی به شکل $\{b\}$ وجود ندارد.

۳ در هر بحث معین، عناصری مورد بررسی قرار می‌گیرند که همهٔ آن‌ها اعضای یک مجموعه به نام مجموعهٔ **مرجع (عام، جهانی)** هستند. مجموعهٔ مرجع را با حرف U نشان می‌دهیم.



۴ مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ **تهی** نام دارد و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش داده می‌شود. پس $\varnothing=\{\ \}$.

۵ برای مشخص کردن یک مجموعه دو روش وجود دارد:

الف) نام بردن (فهرست کردن) عضوهای مجموعه ب) معرفی خاصیت مشترک عضوهای مجموعه به زبان ریاضی (گزاره‌نما)

(توجه کنید که در روش دوم، باید مجموعه مرجع معین شود.)

۶ برای ایجاد یک درک شهودی از نظریهٔ مجموعه‌ها، از یک نمودار هندسی به نام **نمودار وِن** استفاده می‌کنیم. معمولاً مجموعهٔ مرجع را با مستطیل و سایر مجموعه‌های داخل مجموعهٔ مرجع را با دایره یا بیضی نمایش می‌دهیم.

تست: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، کمتر از ۴ عضو دارند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

الف) $A=\{x\in \mathbb{Z} \mid |x|\le 2\}$
ب) $B=\{m\in \mathbb{Z} \mid m^3=m\}$
پ) $C=\{k\in \mathbb{R} \mid k^2-1=0\}$
ت) $D=\{a\in S \mid$ فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس است $S\}$
ث) $E=\{2^x\times 2^y \mid x,y\in \mathbb{N}, x+y=5\}$
ج) $F=\{x\in \mathbb{R} \mid (x^2-5x+6=0)\wedge(x^2\ge 5)\}$
چ) $G=\{x\in \mathbb{Z} \mid (x^2-12x+25=0)\vee(x^2\le 10)\}$
ح) $H=\{\frac{x^2+4}{2x+2}\in \mathbb{Z} \mid x\in \mathbb{N}\wedge x<5\}$

۱) B, D, G, F
۲) B, C, F, H
۳) A, G, H, F
۴) B, D, F, A

پاسخ (گزینه۲) الف) می‌دانیم $|x|\le 2$ نتیجه می‌دهد که $-2\le x\le 2$. پس عضوهای مجموعهٔ A اعداد صحیح متعلق به بازهٔ به‌دست آمده هستند:

$A=\{-2,-1,0,1,2\}$

ب) $m^3=m \Rightarrow m^3-m=0 \Rightarrow m\cdot(m^2-1) \Rightarrow m=0,\pm 1 \Rightarrow B=\{-1,0,1\}$

پ) پس از حل معادلهٔ $k^2-1=0$ داریم: $C=\{-1,1\}$

ت) با توجه به مبحث احتمال داریم: $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

ث) ابتدا جفت اعداد طبیعی x و y را می‌یابیم که در $x+y=۵$ صدق کنند.

$$\begin{array}{c|cccc} x & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline y & ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{array} \Rightarrow \quad E=\{۲^۱\times ۳^۴, ۲^۲\times ۳^۳, ۲^۳\times ۳^۲, ۲^۴\times ۳^۱\}=\{۱۶۲,۱۰۸,۷۲,۴۸\}$$

ج) از حل معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۵x+۶=۰$ درمی‌یابیم که $x=۲$ یا $x=۳$ قابل قبول است که فقط $x=۳$ در گزارهٔ $x^۲\geq ۵$ صدق می‌کند. پس $F=\{۳\}$. (با توجه به ترکیب عطفی xای قابل قبول است که در هر دو گزاره صدق کند.)

چ)

$$x^۲-۱۲x+۳۵=۰ \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x-۵)\cdot(x-۷)=۰ \Rightarrow (x=۵)\vee(x=۷)$$

$$x^۲\leq ۱۰ \xrightarrow{\text{جذر}} |x|\leq\sqrt{۱۰}\Rightarrow -\sqrt{۱۰}\leq x\leq\sqrt{۱۰}$$

اما $\sqrt{۱۰}\simeq ۳/۱$ و در نتیجه اعداد صحیح متعلق به بازهٔ به‌دست آمده عبارت‌اند: از ۳، ۲، ۱، ۰، ۱−، ۲−و ۳− بنابراین:

$G=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۵,۷\}$

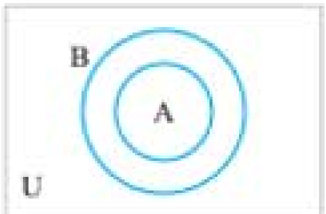
ح) برای یافتن عضوهای مجموعهٔ H، x را برابر اعداد ۴، ۳، ۲ و ۱ قرار می‌دهیم و حاصل عبارت $\frac{x^۲+۴}{۳x+۲}$ را می‌یابیم و در صورت صحیح بودن قبول می‌کنیم:

$$x=۱\Rightarrow\frac{۱^۲+۴}{۳(۱)+۲}=۱\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=۳\Rightarrow\frac{۳^۲+۴}{۳(۳)+۲}=\frac{۱۳}{۱۱}\notin\mathbb{Z}$$

$$x=۲\Rightarrow\frac{۲^۲+۴}{۳(۲)+۲}=۱\in\mathbb{Z} \quad , \quad x=۴\Rightarrow\frac{۴^۲+۴}{۳(۴)+۲}=\frac{۲۰}{۱۴}\notin\mathbb{Z}$$

بنابراین $H=\{۱\}$. پس مجموعه‌های B، C، F و H کمتر از ۴ عضو دارند.

زیر مجموعه



مجموعهٔ A را یک **زیرمجموعه** از مجموعهٔ B می‌نامیم اگر و تنها اگر **هر** عضو A، عضوی از B باشد، در این‌صورت می‌نویسیم $A\subseteq B$. پس: $\boxed{A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x;(x\in A\Rightarrow x\in B)}$

- چنان‌چه عضوی در A وجود داشته باشد، به‌طوری که آن عضو متعلق به مجموعهٔ B نباشد، در این‌صورت A زیرمجموعهٔ B نیست و می‌نویسیم $A\not\subseteq B$ پس: $\boxed{A\not\subseteq B\Leftrightarrow \exists x;(x\in A\wedge x\notin B)}$

(توجه کنید که از نقیض سور عمومی و نقیض گزارهٔ شرطی استفاده شده است.)

تست: مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

$C=\{x \mid \text{یک لوزی است } x\}$ $\quad$ $A=\{x \mid \text{یک چهارضلعی است } x\}$

$D=\{x \mid \text{یک مربع است } x\}$ $\quad$ $B=\{x \mid \text{یک مستطیل است } x\}$

۱) $D\subseteq C$ $\quad$ ۲) $A\subseteq B$ $\quad$ ۳) $D\subseteq B$ $\quad$ ۴) $D\subseteq A$

پاسخ گزینه ۲ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: درست است. از آنجایی که «هر مربع، یک لوزی است»، پس $D\subseteq C$.

گزینهٔ «۲»: نادرست است. چون «هر چهار ضلعی، لزوماً مستطیل نیست»، پس $A\not\subseteq B$.

گزینهٔ «۳»: درست است، می‌دانیم «هر مربع، مستطیل است»، پس $D\subseteq B$.

گزینهٔ «۴»: درست است. واضح است که «هر مربع یک چهار ضلعی است»، پس $D\subseteq A$.

فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,...,۹\}$، $B=\{۲,۴,۶,۸\}$، $C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$، $D=\{۳,۴,۵\}$ و $E=\{۳,۵\}$ باشند. در کدام حالت مجموعهٔ X وجود ندارد؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) X و B عضو مشترکی ندارند. $\quad$ ۲) $X\subseteq A$ ولی $X\not\subseteq C$.

۳) $X\subseteq D$ ولی $X\not\subseteq B$. $\quad$ ۴) $X\subseteq C$ ولی $X\not\subseteq A$.

پاسخ گزینه ۴ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: $X=C$ یا $X=E$ قابل قبول است.

گزینهٔ «۲»: $X=B$ یا $X=D$، زیرا $B\subseteq A$ ولی $B\not\subseteq C$ و در مورد $X=D$ نیز $D\subseteq A$ ولی $D\not\subseteq C$.

گزینهٔ «۳»: $X=E$، زیرا $E\subseteq D$ (تمام عضوهای E در D هستند)، ولی $E\not\subseteq B$ (زیرا مثلاً $۳\in E$، در صورتی که $۳\notin B$).

گزینهٔ «۴»: چنین Xای وجود ندارد، زیرا تمام عضوهای C در A هستند.

نکته: $\subseteq$ یا $\in$ مسئله این است:

خودِ دایره، در مربع دیده می‌شود ⇔ $\bigcirc \in \square$
تمام عضوهای دایره، در مربع دیده می‌شود ⇔ $\bigcirc \subseteq \square$

تست: اگر $A=\{a,b\}$ ، $B=\{a,b,\{a,b\}\}$ و $C=\{a,b,\{b\},\{a,b\}\}$ باشند، کدام گزاره نادرست است؟

۱) $A \in B$ ۲) $A \subseteq B$ ۳) $A \in C$ ۴) $B \in C$

پاسخ گزینهٔ۴ واضح است که در مجموعهٔ C، عضوی به‌صورت $\{a,b,\{a,b\}\}$ دیده نمی‌شود. به عبارت دیگر خودِ B در C نیست. پس $B \notin C$. اما چون تمام عضوهای B در C دیده می‌شوند، پس $B \subseteq C$.

در مورد سایر گزینه‌ها، چون خودِ A در B و C دیده می‌شود، پس $A \in B$ و $A \in C$ و چون تمام عضوهای A در B دیده می‌شوند، بنابراین $A \subseteq B$ و به همین ترتیب $A \subseteq C$ نیز درست است.

کدام گزاره نادرست است؟

۱) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ ۲) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
۳) $\varnothing = \{\varnothing\}$ ۴) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\} \in \{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$

پاسخ گزینهٔ۳ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: می‌دانیم $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است. به عبارت دیگر $\varnothing \subseteq \underset{\text{هر مجموعهٔ دلخواه}}{\square}$، پس گزینهٔ «۱»، یک گزارهٔ درست است.

گزینهٔ «۲»: واضح است که خودِ $\varnothing$ در $\{\varnothing\}$ دیده می‌شود، پس $\varnothing \in \{\varnothing\}$ و گزاره‌ای درست است.

گزینهٔ «۳»: واضح است که $\{\varnothing\}$ یک مجموعهٔ تهی نیست. مجموعه‌ای شامل نماد $\varnothing$ است، پس گزارهٔ $\{\varnothing\} = \varnothing$ نادرست است.

گزینهٔ «۴»: خود $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ در مجموعهٔ $\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$ دیده می‌شود، پس گزاره‌ای درست است.

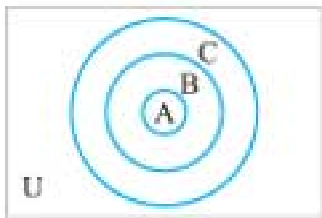
ویژگی‌های زیرمجموعه

ویژگی ۱: هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است. یعنی اگر A یک مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشد. آن‌گاه: $\boxed{A \subseteq A}$

ویژگی ۲: مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است. یعنی اگر A یک مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشد. آن‌گاه: $\boxed{\varnothing \subseteq A}$

ویژگی ۳: برای سه مجموعهٔ دلخواه، A، B و C با مرجع U داریم:

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C \quad \text{(خاصیت تعدی)}$$



دومجموعهٔ مساوی

دو مجموعهٔ A و B با مرجع U **مساوی‌اند** اگر و تنها اگر هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد. به عبارت دیگر:

$$A = B \Leftrightarrow [\forall x;(x \in A \Leftrightarrow x \in B)]$$
$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

- بنابراین برای آن‌که نشان دهیم دو مجموعه برابرند، باید ثابت کنیم که هریک، زیرمجموعهٔ دیگری است.

تست: با توجه به مجموعه‌های زیر، کدام تساوی درست است؟

$A=\{m \in \mathbb{Z} \mid |m|<۲\}$ ، $B=\{x \in \mathbb{Z} \mid x^۳ = x\}$
$C=\{y \in \mathbb{Z} \mid y^۲ \leq ۲y\}$ ، $D=\{m \in \mathbb{Z} \mid m^۲ \leq ۱\}$
$E=\{m \in \mathbb{Z} \mid m^۳ + ۲m = ۳m^۲\}$

۱) $A=B=C$ و $D=E$ ۲) $A=B=E$ و $D=C$
۳) $B=D=A$ و $E=C$ ۴) $B=C=D$ و $A=E$

پاسخ گزینهٔ۳ کافی است عضوهای هریک از مجموعه‌ها را به‌صورت فهرستی بنویسیم. داریم:

$$A=\{m \in \mathbb{Z} \mid -۲<m<۲\}=\{-۱,۰,۱\}$$
$$B=\{x \in \mathbb{Z} \mid x^۳ - x = ۰\}=\{x \in \mathbb{Z} \mid x(x^۲-۱)=۰\}=\{x \in \mathbb{Z} \mid (x=۰) \vee (x^۲-۱=۰)\}=\{۰,-۱,۱\}$$
$$C=\{y \in \mathbb{Z} \mid y^۲ - ۲y \leq ۰\}=\{y \in \mathbb{Z} \mid y(y-۲) \leq ۰\}=\{۰,۱,۲\}$$
$$D=\{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \leq ۱\}=\{m \in \mathbb{Z} \mid -۱ \leq m \leq ۱\}=\{-۱,۰,۱\}$$
$$E=\{m \in \mathbb{Z} \mid m^۳ - ۳m^۲ + ۲m = ۰\}=\{m \in \mathbb{Z} \mid m(m^۲-۳m+۲)=۰\}=\{m \in \mathbb{Z} \mid m(m-۱)(m-۲)=۰\}=\{۰,۱,۲\}$$

مبانی احتمال

پدیدهٔ تصادفی

هر پدیده‌ای که قبل از رخ دادن، نتیجهٔ آن را نتوان مشخص کرد، **پدیدهٔ تصادفی** نامیده می‌شود. مانند پرتاب یک سکه، ریختن یک تاس و ... .
واضح است که در پرتاب یک سکه، نمی‌توان مشخص کرد که نتیجه «رو» یا «پشت» است و یا در ریختن یک تاس نمی‌توان دقیق اعلام کرد که کدام عدد ظاهر می‌شود.

فضای نمونه (S)

مجموعهٔ **تمام نتایج ممکن** از انجام یک پدیدهٔ تصادفی را **فضای نمونه** می‌گویند.

- فضای نمونه را با حرف S نشان می‌دهند. هر عضو فضای نمونه، یک «**برآمد**» نامیده می‌شود.
- اعضای فضای نمونه، مشخص می‌کنند که نتیجهٔ آزمایش یا پدیده‌ای که در حال بررسی آن هستیم، چه حالت‌هایی دارد.
- از آن‌جایی که فضای نمونه، یک مجموعه است، پس به دو روش زیر می‌توان آن را مشخص کرد:

الف) نام بردن (فهرست کردن) برآمدها ب) معرفی خاصیت مشترک برآمدها به زبان ریاضی (گزاره‌نما)

مثال: در مورد هریک از پدیده‌های زیر فضای نمونه را مشخص کنید.

الف) پرتاب یک سکه ب) خانوادهٔ تک فرزندی پ) ریختن یک تاس

ت) خارج کردن یک لامپ به تصادف از جعبه‌ای شامل پنج لامپ به شماره‌های ۱ تا ۵

الف) اگر «رو» و «پشت» سکه را به‌ترتیب با «ر» و «پ» نشان دهیم، آن‌گاه فضای نمونه عبارت است از: S = {ر , پ}

ب) فرزند یک خانواده «دختر» یا «پسر» است که به‌ترتیب با «د» و «پ» نشان می‌دهیم. پس: S = {د , پ}

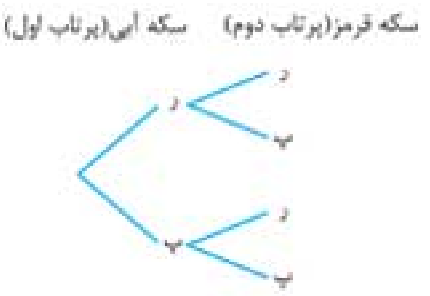
پ) در آزمایش ریختن یک تاس فقط ممکن است اعداد ۱ تا ۶ ظاهر شود. پس: $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=\{x\in \mathbb{N} \mid x\leq ۶\}$

ت) واضح است که اگر لامپ‌های داخل جعبه را به‌صورت $L_۱, L_۲, ..., L_۵$ نمایش دهیم، آن‌گاه: $S=\{L_۱, L_۲, ..., L_۵\}$

مثال: فضای نمونه‌ای هریک از پدیده‌های زیر را مشخص کنید.

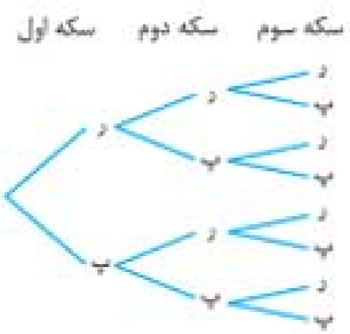
الف) پرتاب دو سکه با هم (دو بار پرتاب یک سکه) ب) پرتاب سه سکه با هم (سه بار پرتاب یک سکه)

الف) لازم به ذکر است که در آزمایش پرتاب دو سکه با هم، فرض می‌کنیم هر دو سکه متمایزند (به عنوان مثال یک سکه آبی و دیگری قرمز است)، بنابراین فضای نمونه‌ای به کمک نمودار درختی عبارت است از: S = {(ر , ر) , (ر , پ) , (پ , ر) , (پ , پ)}



دقت کنید که حالت (ر , پ) با حالت (پ , ر) فرق دارد. در حالت (پ , ر)، سکهٔ آبی (پرتاب اول) «ر» و سکهٔ قرمز (پرتاب دوم) «پ» آمده و در حالت (ر , پ)، سکهٔ آبی (پرتاب اول) «پ» و سکهٔ قرمز (پرتاب دوم) «ر» آمده است.

ب)



S = {(ر , ر , ر),(ر , ر , پ),(ر , پ , ر),(ر , پ , پ),(پ , ر , ر),(پ , ر , پ),(پ , پ , ر),(پ , پ , پ)}

نتیجه: ۱) اگر S فضای نمونه‌ای یک بار انجام یک پدیدهٔ تصادفی باشد، فضای نمونه‌ای دوبار تکرار آن $S\times S$ است. پس عضوهای فضای نمونه (برآمدها) به‌صورت زوج مرتب هستند.

۲) اگر S فضای نمونه‌ای یک بار انجام یک پدیدهٔ تصادفی باشد، فضای نمونه‌ای سه‌بار تکرار آن، $S\times S\times S$ است. پس عضوهای فضای نمونه (برآمدها) به‌صورت سه‌تایی مرتب هستند.

۳) در تعمیم نتیجهٔ ۲ می‌توان گفت فضای نمونه‌ای n بار تکرار یک آزمایش تصادفی، $\overbrace{S\times S\times \ldots\times S}^{n\ \text{بار}}$ است و هر عضو (برآمد) یک n تایی مرتب است.

۴) اگر فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی، در یک بار انجام دارای x برآمد باشد، در n بار تکرار آن، x^n برآمد حاصل می‌شود.

پس همان‌طورکه ملاحظه شد، فضای نمونه‌ای:
- پرتاب یک سکه دارای ۲ برآمد است.
- پرتاب دو سکه با هم (دو بار پرتاب یک سکه) دارای $۴ = ۲^۲$ برآمد است.
- پرتاب سه سکه با هم (سه بار پرتاب یک سکه) دارای $۸ = ۲^۳$ برآمد است.

بنابراین به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت:

پدیدهٔ تصادفی	تعداد برآمدهای فضای نمونه
پرتاب n سکه با هم (n بار پرتاب یک سکه)	۲^n
یک خانوادهٔ n فرزندی	۲^n
پرتاب n تاس با هم (n بار پرتاب یک تاس)	۶^n

- در تمامی پدیده‌های بالا، سکه‌ها و تاس‌ها **متمایز** فرض می‌شوند. (آبی، قرمز، ...)

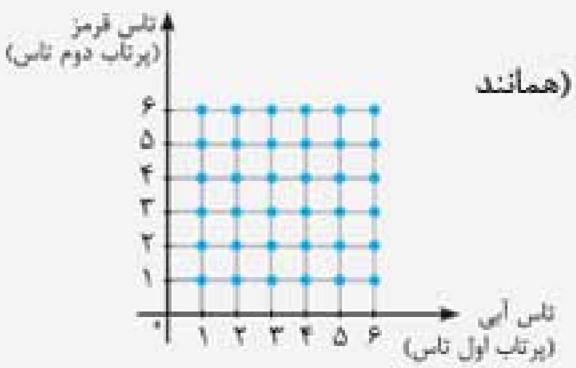
تست: فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب دو تاس با هم (دو بار پرتاب یک تاس) چند برآمد دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۶

پاسخ گزینه۳ می‌دانیم فضای نمونه در یک بار پرتاب یک تاس $\{۱,۲,...,۶\}$ است، پس فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس با هم (دوبار پرتاب یک تاس) عبارت است از: $S=\{۱,۲,...,۶\}\times\{۱,۲,...,۶\}=\{(۱,۱),(۱,۲),...,(۶,۶)\}$

که دارای $۳۶ = ۶^۲$ برآمد است.

- لازم به ذکر است که دو تاس را متمایز فرض می‌کنیم (مثلاً تاس قرمز و تاس آبی). بنابراین برآمد (۱،۲) با برآمد (۲،۱) متفاوت است. در اولی، تاس قرمز (پرتاب اول تاس) عدد ۱ و تاس آبی (پرتاب دوم تاس) عدد ۲ آمده است و در دومی نتایج عوض شده است. یعنی تاس قرمز (پرتاب اول تاس) عدد ۲ و تاس آبی (پرتاب دوم تاس) عدد ۱ آمده است.
- فضای نمونه را در آزمایش بالا می‌توان به زبان ریاضی (جبر مجموعه‌ها) به‌صورت مقابل نمایش داد: $S=\{(x,y)\mid x,y\in \mathbb{N} \wedge x,y\leq ۶\}$
- فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی (و آزمایش‌های مشابه آن) را می‌توان با دو محور عمود بر هم (همانند نمایش ضرب دکارتی مجموعه‌ها) به‌صورت مقابل (به کمک نقطه‌یابی) نشان داد:



در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج معیار زیر مشخص می‌شود. این فضای نمونه چند برآمد دارد؟(برگرفته از کتاب درسی)

- **دمای هوا: سرد یا گرم**
- **رطوبت هوا: خشک یا مرطوب**
- **سرعت باد: باد می‌وزد یا باد نمی‌وزد**
- **وضعیت هوا: صاف، نیمه ابری یا ابری**
- **مقدار بارش: بارندگی یا عدم بارندگی**

۱) ۲۵ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۱۶

پاسخ گزینه۳ اگر پنج موضوع گفته شده را با پنج مجموعهٔ زیر نشان دهیم:

$S_1=\{\text{گرم}, \text{سرد}\}$ $S_2=\{\text{مرطوب}, \text{خشک}\}$

$S_4=\{\text{ابری}, \text{نیمه‌ابری}, \text{صاف}\}$ $S_3=\{\text{باد می‌وزد}, \text{باد نمی‌وزد}\}$

$S_5=\{\text{عدم‌بارندگی}, \text{بارندگی}\}$

فضای نمونه عبارت است از: $S=S_1\times S_2\times S_3\times S_4\times S_5$، که هر برآمد آن یک پنج‌تایی مرتب به‌صورت زیر است:

$$(\underset{\text{از } S_1}{\underset{\downarrow}{a}}, \underset{\text{از } S_2}{\underset{\downarrow}{b}}, \underset{\text{از } S_3}{\underset{\downarrow}{c}}, \underset{\text{از } S_4}{\underset{\downarrow}{d}}, \underset{\text{از } S_5}{\underset{\downarrow}{e}})$$

مثلاً یک برآمد به‌صورت (عدم بارندگی، صاف، باد نمی‌وزد، خشک، گرم) است.

فضای نمونه دارای $۴۸ = ۲\times ۳\times ۲\times ۲\times ۲$ برآمد است.

یک رانندهٔ تاکسی خطی در ایستگاه منتظر می‌ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند (اما خالی حرکت نمی‌کند). در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد. فضای نمونه در توصیف این پدیدهٔ تصادفی، برای یک بار رفت و برگشت چند برآمد دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۵ ۳) ۲۰ ۴) ۸

پاسخ گزینه ۱ با توجه به اینکه تعداد این دو نوع مسافر در رفت و برگشت عددی بین ۱ تا ۴ است، پس:

$S=\{۱,۲,۳,۴\}\times\{۱,۲,۳,۴\}\Rightarrow n(S)=۴\times۴=۱۶$

توجه کنید که برآمدهای موجود در S به‌صورت زوج مرتب هستند و مثلاً زوج مرتب (۱,۲) بیان‌گر آن است که تاکسی در مسیر رفت با ۱ مسافر و در مسیر برگشت با ۲ مسافر حرکت کرده است.

توجه: کیسه‌ای شامل n مهرهٔ متمایز است. دو مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. می‌خواهیم بررسی کنیم که در هریک از حالت‌های زیر فضای نمونه دارای چند برآمد است:

الف) دو مهره را با هم (همزمان) بیرون می‌آوریم. **ب)** دو مهره را پی‌درپی (متوالی، یکی یکی) بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم.

پ) دو مهره را پی‌درپی (متوالی، یکی یکی) با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم.

الف) اگر دو مهره را به‌صورت «با هم» یا «همزمان» از کیسه خارج کنیم، **ترتیب ندارند** و عمل انتخاب دو مهره از n مهرهٔ متمایز صورت می‌پذیرد و درنتیجه $n(S)=\binom{n}{۲}$ است.

ب) خارج کردن مهره‌ها به‌صورت پی‌درپی (متوالی، یکی یکی)، یعنی **ترتیب دارند**. از طرفی چون این عمل بدون جای‌گذاری صورت می‌پذیرد، پس در بار اول یک مهره از n مهره و در بار دوم یک مهره از $n-۱$ مهرهٔ باقی مانده انتخاب می‌شود. پس:

$$n(S)=\underbrace{\binom{n}{۱}}_{\text{مهرهٔ اول}}\times\underbrace{\binom{n-۱}{۱}}_{\text{مهرهٔ دوم}}$$

پ) همانند قسمت «ب»، با این تفاوت که مهرهٔ اول پس از مشاهده به کیسه برگردانده می‌شود و مهرهٔ دوم باز از n مهرهٔ داخل کیسه انتخاب می‌گردد و امکان تکرار هست. پس:

$$n(S)=\binom{n}{۱}\times\binom{n}{۱}$$

پیشامد

پیشامد زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه است.

- پیشامد بخشی از فضای نمونه است که مطلوب مسئله است.
- اگر تنها یک عضو از پیشامدی رخ بدهد، می‌گوییم آن پیشامد رخ داده است.
- اگر فضای نمونهٔ حاصل از انجام یک پدیدهٔ تصادفی دارای n برآمد باشد، آن‌گاه ۲^n پیشامد می‌توان برای آن پدیدهٔ تصادفی مشخص کرد.
- هر پیشامد تک عضوی را یک پیشامد ساده می‌نامند.

مثال: در آزمایش پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد زوج ظاهر شود. **ب) عدد اول ظاهر شود.**

می‌دانیم در آزمایش پرتاب یک تاس فضای نمونه دارای ۶ برآمد است. امّا پیشامدهای موردنظر بخشی از این فضای نمونه هستند.

الف) $A=\{۲,۴,۶\}$ ب) $B=\{۲,۳,۵\}$

تست: جعبه‌ای شامل ۱۵ عدد لامپ به شماره‌های ۱ تا ۱۵ است. لامپی به تصادف از جعبه بیرون می‌آوریم. پیشامد A، که در آن «عدد روی لامپ یک عدد اول باشد» چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ گزینهٔ۳ اعداد اول بین ۱ تا ۱۵ عبارت‌اند از: $A=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳\}$

در آزمایش پرتاب دو تاس با هم، کدام‌یک از پیشامدهای زیر بیشترین برآمد را دارد؟

پیشامد A: «مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۸ است»

پیشامد B: «هر دو عدد ظاهر شده یکسان هستند»

پیشامد C: «مجموع دو عدد ظاهر شده عددی اول است»

۱) A ۲) B ۳) C ۴) هر سه مساوی‌اند.

پاسخ گزینهٔ۳

$A=\{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)\}$

$B=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$

(توجه کنید برآمد $(۲,۶)$ با برآمد $(۶,۲)$ فرق دارد، زیرا دو تاس متمایزند.)

می‌دانیم مجموع دو عدد ظاهر شده از دو تاس، عددی بین ۲ تا ۱۲ است. امّا پیشامد موردنظر، تمام برآمدهایی است که مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ هستند. پس:

$$C=\{\underbrace{(۱,۱)}_{\text{مجموع ۲}},\underbrace{(۱,۲),(۲,۱)}_{\text{مجموع ۳}},\underbrace{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)}_{\text{مجموع ۵}},\underbrace{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)}_{\text{مجموع ۷}},\underbrace{(۵,۶),(۶,۵)}_{\text{مجموع ۱۱}}\}$$

نتیجه: اگر $a\neq 0$ و b اعدادی صحیح و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم: $\boxed{a|b \xrightarrow{m\le n} a^m|b^n}$

(به عبارت دیگر دو طرف نماد بخش‌پذیری را به توان‌های مختلف طبیعی می‌توان رساند، به شرط آن‌که توان موردنظر برای سمت راست بزرگ‌تر از توان مورد نظر برای سمت چپ باشد.)

زیرا: $a|b \xrightarrow[\text{(ویژگی ۹)}]{\text{توان } m} a^m|b^m \xrightarrow[\forall m\in\mathbb{Z}]{\text{ویژگی ۸}} a^m|kb^m \xrightarrow[(n\ge m)]{k=b^{n-m}} a^m|b^{n-m}\times b^m \Rightarrow a^m|b^n$

برای نمونه: (نادرست) $3|6 \Rightarrow 3^3|\underbrace{6^2}_{36}$ ، (درست) $3|6 \Rightarrow 3^3|6^4$

حالت خاص برای هر عدد صحیح a داریم: $\boxed{\forall m,n\in\mathbb{N};\ m\le n \Rightarrow a^m|a^n}$

برای نمونه: $3^4|3^9$

مثال: الف) اگر $a|b$، آیا $a^3|b^2$؟ ب) اگر $a^3|b^2$، آیا $a|b$؟

الف) خیر، به مثال نقض روبه‌رو توجه کنید: $3|6 \Rightarrow \underbrace{3^3}_{27}\nmid\underbrace{6^2}_{36}$

ب) بله، زیرا: $a^3|b^2 \xrightarrow[\forall m\in\mathbb{Z}]{\text{ویژگی ۸}} a^3|mb^2 \xrightarrow{m=b} a^3|b^3 \xrightarrow{\text{ویژگی ۹}} a|b$

نتیجه: اگر $a\neq 0$ و b اعدادی صحیح و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم: $\boxed{a^m|b^n \xrightarrow{m\ge n} a|b}$

به عبارت دیگر از دو طرف نماد بخش‌پذیری، توان‌های مختلف طبیعی را می‌توان برداشت به شرط آن‌که توان سمت چپ، بزرگ‌تر از توان سمت راست باشد. **برای نمونه:** (نادرست) $4^3|2^6 \Rightarrow 4|2$ ، (درست) $2^7|8^3 \Rightarrow 2|8$

تست: اگر $a\neq 0$ ، $b\neq 0$ و c سه عدد صحیح باشند و $a^3|b$ و $2b|c^2$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $a|c$ ۲) $a^2|c$ ۳) $b|c$ ۴) $c|a$

پاسخ گزینهٔ ۱ با توجه به فرض داده شده، داریم: $a^3|b \xrightarrow[\text{(ویژگی ۸)}]{\forall m\in\mathbb{Z}} a^3|mb \xrightarrow{m=2} a^3|2b$

از طرفی طبق فرض مسئله، $2b|c^2$. پس به کمک ویژگی ۷ (خاصیت تعدی بخش‌پذیری) داریم: $(a^3|2b \wedge 2b|c^2)\Rightarrow a^3|c^2 \Rightarrow a|c$

اگر $a\neq 0$ و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه کدام گزارهٔ شرطی همواره درست است؟

۱) $a^3|b^2 \Rightarrow a^4|b^3$ ۲) $a^2|b^3 \Rightarrow a|b$

۳) $a^4|b^3 \Rightarrow a^3|b^2$ ۴) $a|b \Rightarrow a^3|b^2$

پاسخ گزینهٔ ۱ در گزینهٔ «۱» طبق تعریف بخش‌پذیری داریم:

$$a^3|b^2 \xrightarrow{\exists q\in\mathbb{Z}} b^2=a^3.q \xrightarrow{\text{توان ۳}} (b^2)^3=(a^3.q)^3$$

$$\Rightarrow b^6=a^9.q^3 \Rightarrow b^6=a^8.(\underbrace{a.q^3}_{q'\in\mathbb{Z}}) \Rightarrow a^8|b^6 \Rightarrow (a^4)^2|(b^3)^2 \xrightarrow{\text{ویژگی ۹ (ب)}} a^4|b^3$$

بنابراین گزینهٔ «۱»، یک گزارهٔ شرطی همیشه درست است و در مورد سایر گزینه‌ها، مثال نقض وجود دارد.

راهبرد: برای دو عدد صحیح $a\neq 0$ و b و اعداد طبیعی m، n، i و j، گزارهٔ شرطی زیر با شرط $mj-ni\ge 0$ همیشه درست است.

دور در دور
نزدیک در نزدیک

$$a^m|b^n \Rightarrow a^i|b^j$$

(نزدیک در نزدیک) − (دور در دور) ≥ 0

بنابراین گزینهٔ «۱» همیشه درست است، زیرا $(3)(3)-(2)(4)\ge 0$، اما مثلاً گزینهٔ «۳» همواره درست نیست، زیرا $(4)(2)-(3)(3)\not\ge 0$.

اگر $a^7|b^4$ ، $a\neq 0$ و b دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست <u>نیست</u>؟

۱) $a^2|b^3$ ۲) $a^5|b^3$ ۳) $a^8|b^5$ ۴) $a^4|b^2$

پاسخ گزینهٔ ۴ **بررسی گزینه‌ها:** طبق راهبرد گفته‌شده، در سؤال قبل داریم:

گزینهٔ «۱»: $a^7|b^4 \Rightarrow a^2|b^3$ این گزارهٔ شرطی همیشه درست است. زیرا: $(7)(3)-(4)(2)\ge 0$

گزینهٔ «۲»: $a^7|b^4 \Rightarrow a^5|b^3$ این گزارهٔ شرطی نیز همیشه درست است، زیرا: $(7)(3)-(4)(5)\ge 0$

گزینهٔ «۳»: $a^7|b^4 \Rightarrow a^8|b^5$ این گزارهٔ شرطی همواره درست است، زیرا: $(7)(5)-(4)(8)\ge 0$

گزینهٔ «۴»: $a^7|b^4 \Rightarrow a^4|b^2$ این گزارهٔ شرطی همیشه درست نیست، زیرا: $(7)(2)-(4)(4)\not\ge 0$

ویژگی ۱۰: اگر عددی بر حاصل‌ضرب چند عدد صحیح غیرصفر بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر هر کدام از آن‌ها نیز بخش‌پذیر است.

به عبارت دیگر برای اعداد صحیح $a_1 \neq 0$ ، $a_2 \neq 0$ ، $a_3 \neq 0$ ، ... و b داریم:

$$\boxed{(a_1.a_2.a_3...)\,|\,b \Rightarrow (a_1|b \ \wedge\ a_2|b \ \wedge\ a_3|b \ \wedge \cdots)}$$

زیرا:

$$(a_1.a_2.a_3...)\,|\,b \xrightarrow{\exists q\in\mathbb{Z}} b=(a_1.a_2.a_3...).q = a_1.(\underbrace{a_2.a_3\cdots q}_{q'\in\mathbb{Z}}) \Rightarrow b = a_1.q' \Rightarrow a_1|b$$

(به همین ترتیب $a_2|b$ ، $a_3|b$ و ...)

نتیجه: طبق ویژگی ۱۰ درمی‌یابیم که لاغر، لاغرتر می‌شود.

برای نمونه:

$$(۲\times۳\times۴)|۴۸ \Rightarrow (۲|۴۸ \ \wedge\ ۳|۴۸ \ \wedge\ ۴|۴۸)$$

حالت خاص برای دو عدد صحیح $a \neq 0$ و b داریم:

$$\boxed{a^n|b \xrightarrow{\forall n\in\mathbb{N}} a|b}$$

(کافی است در ویژگی ۱۰، قرار دهیم $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a$)

هشدار: عکس ویژگی ۱۰ همواره درست نیست. به عبارت دیگر اگر عددی بر چند عدد صحیح بخش‌پذیر باشد، ممکن است بر ضرب آن‌ها بخش‌پذیر نباشد.

پس در حالت کلی اگر $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، $c \neq 0$ ، ... و n اعدادی صحیح باشند،

$$(a|n \ \wedge\ b|n \ \wedge\ c|n \ \wedge\ ...) \not\Rightarrow (a.b.c...)|n$$

به عبارت دیگر، **لاغر، چاق نمی‌شود.** به‌عنوان مثال می‌دانیم $۴|۱۲$ و $۶|۱۲$، اما $۴\times۶ \nmid ۱۲$

حالت خاص اگر عددی بر چند عدد صحیح که دو به دو نسبت به هم اول‌اند (یعنی با هم عامل مشترکی به جز عدد ۱ ندارند)، بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر حاصل‌ضرب آن‌ها نیز بخش‌پذیر است.

برای نمونه: می‌دانیم $۳|۲۴$ و $۴|۲۴$ و چون ۳ و ۴ نسبت به هم اول‌اند (هیچ عامل مشترکی غیر از عدد ۱ ندارند)، پس $۳\times۴|۲۴$ و این نتیجه‌گیری همواره درست است، اما $۶|۲۴$ و $۸|۲۴$ و چون دو عدد ۶ و ۸ نسبت به هم اول نیستند (زیرا عامل مشترک غیر از عدد ۱ دارند، که آن عامل مشترک عدد ۲ است)، پس $۶\times۸ \nmid ۲۴$.

تست: اگر $۱۵۰|a^n$ باشد، آن‌گاه عدد صحیح a بر کدام عدد همواره بخش‌پذیر است؟ $(n\in\mathbb{N})$

۱) ۳۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۵ ۴) ۴۰

پاسخ گزینه ۱ می‌دانیم $۱۵۰ = ۲\times۳\times۵^۲$، پس طبق فرض داده‌شده، $۲\times۳\times۵^۲|a^n$. به کمک ویژگی ۱۰ (لاغر، لاغرتر می‌شود)، درمی‌یابیم که:

$$۲|a^n \quad , \quad ۳|a^n \quad , \quad ۵^۲|a^n \Rightarrow ۵|a^n$$

از طرفی طبق حالت خاص ۲ در ویژگی ۸، چون ۲، ۳ و ۵ اعدادی اول می‌باشند، پس:

$$۲|a^n \Rightarrow ۲|a \quad , \quad ۳|a^n \Rightarrow ۳|a \quad , \quad ۵|a^n \Rightarrow ۵|a$$

اما چون ۲، ۳ و ۵ دو به دو نسبت به هم اول‌اند (چرا؟)، پس طبق حالت خاص عکس ویژگی ۱۰، می‌توان نتیجه گرفت $۲\times۳\times۵|a$ لذا $۳۰|a$

ویژگی ۱۱: دو طرف دو یا چند بخش‌پذیری را می‌توان نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب کرد.

به عبارت دیگر اگر $a \neq 0$ ، b ، $c \neq 0$ و d چهار عدد صحیح باشند، داریم:

$$\boxed{\begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases} \Rightarrow ac|bd}$$

زیرا:

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q\in\mathbb{Z}} b = a.q \\ c|d \xrightarrow{\exists q'\in\mathbb{Z}} d = c.q' \end{cases} \xrightarrow{\times} bd = aqcq' \Rightarrow bd = (ac)(\underbrace{qq'}_{q''\in\mathbb{Z}}) \Rightarrow bd = (ac).q'' \Rightarrow ac|bd$$

برای نمونه:

$$\begin{cases} ۳|۶ \\ ۴|۸ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{۳\times۴}_{۱۲}|\underbrace{۶\times۸}_{۴۸}$$

هشدار: عکس گزارهٔ شرطی ویژگی ۱۱، همواره درست نیست. به عبارت دیگر:

$$ac|bd \not\Rightarrow \begin{cases} a|b \\ c|d \end{cases}$$

به مثال نقض زیر توجه کنید:

می‌دانیم که $\underbrace{۶\times۳۰}_{۱۸۰}|\underbrace{۴\times۹}_{۳۶}$، ولی همان‌طور که ملاحظه می‌شود $۶ \nmid ۴$ و $۳۰ \nmid ۹$ یا $۳۰ \nmid ۴$ و $۶ \nmid ۹$.

تست: اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ ، $۴|b$ و $۶|a$ باشند، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری همواره درست است؟

۱) $۱۰|a+b$ ۲) $۸|۲ab$ ۳) $۴۰|a^۲+b^۲$ ۴) $۳۶|۳ab$

پاسخ گزینه ۴ مطابق با ویژگی ۱۱، دو طرف دو رابطهٔ بخش‌پذیری داده شده را می‌توان نظیر به نظیر در یکدیگر ضرب کرد. پس:

$$(۶|a \wedge ۴|b) \Rightarrow ۶\times۴|ab \Rightarrow ۲۴|ab$$

حال به کمک ویژگی ۱۰، داریم:

$$۲۴|ab \Rightarrow ۲\times۱۲|ab \xrightarrow{\text{لاغر، لاغرتر می‌شود}} (۲|ab \wedge ۱۲|ab)$$

و در آخر با ضرب دو طرف رابطهٔ بخش‌پذیری به دست آمده در عدد ۳، داریم:

$$۱۲|ab \xrightarrow{\times ۳} ۳۶|۳ab$$

برای نمونه: می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا عدد ۶۷۸۹۱۴۳۲۵ مربع کامل است یا نه؟ برای این منظور عدد فرد داده شده را بر عدد ۸ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$6789143 25 = 6789140000+325 = \underbrace{678914\times\underbrace{1000}_{8k}}_{8k'}+325$$

توجه کنید عدد ۱۰۰۰ مضرب ۸ است (زیرا ۱۰۰۰=۱۲۵×۸)، پس عدد ۶۷۸۹۱۴×۱۰۰۰ نیز مضرب ۸ است. بنابراین کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۳۲۵ بر عدد ۸ را بیابیم. واضح است که $325=8(40)+5=8k''+5$ لذا:

$$678914325=8k'+8k''+5=8(\underbrace{k'+k''}_{q\in\mathbb{Z}})+5=8q+5$$

یعنی عدد ۶۷۸۹۱۴۳۲۵ به‌صورت $8q+1$ نیست و در نتیجه مربع کامل نیست.

راهبرد: باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد طبیعی بر عدد ۸، با باقی‌ماندهٔ تقسیم سه رقم سمت راست آن عدد بر ۸ برابر است.

بنابراین در مثال بالا، برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۶۷۸۹۱۴۳۲۵ بر عدد ۸، همان باقی‌مانده تقسیم عدد ۳۲۵ بر ۸ را می‌یابیم.

هشدار: اگر یک عدد صحیح و فرد به‌صورت $8q+1$ باشد، در مورد مربع کامل بودن یا نبودن آن چیزی نمی‌توان گفت.

۱۰) دو برابر یک عدد صحیح فرد، مربع کامل نیست. به عبارت دیگر:

$\boxed{a = \text{فرد} \Rightarrow 2a \neq \text{مربع}}$

برای اثبات، از برهان خلف کمک می‌گیریم. فرض می‌کنیم (فرض خلف) عدد $2a$ مربع کامل است و $2a=n^2$، به‌طوری‌که $n\in\mathbb{Z}$. اما از آن‌جایی که $2a$ یک عدد زوج می‌باشد، پس n^2 و در نتیجه n زوج است لذا $n=2k$، که $k\in\mathbb{Z}$. بنابراین:

$$n=2k\Rightarrow n^2=4k^2\xrightarrow{2a=n^2}2a=4k^2\xrightarrow{\div 2}a=2k^2$$

یعنی a عددی زوج به‌دست آمد، که با فرض فرد بودن a در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و در صورت فرد بودن a، $2a$ مربع کامل نیست.

نتیجه: اگر خارج‌قسمت تقسیم یک عدد صحیح زوج بر عدد ۲، عددی فرد باشد، آن‌گاه آن عدد زوج مربع کامل نیست (اگر خارج‌قسمت این تقسیم عددی زوج باشد، در مورد مربع بودن یا نبودن آن عدد زوج، چیزی نمی‌توان گفت.)

برای نمونه: می‌خواهیم بررسی کنیم که عدد ۲۷۵۸۲۱۴۶ مربع کامل است یا نه؟ از آن‌جایی که این عدد زوج است، لذا خارج‌قسمت تقسیم آن را بر عدد ۲ بررسی می‌کنیم. واضح است که:

$$27582146=2\times13791073=2\times(\text{فرد})$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود این عدد زوج در تقسیم بر عدد ۲، خارج قسمت فرد دارد. به‌عبارت دیگر این عدد زوج، با دو برابر یک عدد فرد برابر است لذا مربع کامل نیست.

یادآوری: ۱) هیچ مربع کاملی به تعدادی فرد رقم صفر ختم نمی‌شود.

برای نمونه: عدد ۴۷۹۶۴۲۵۰۰۰ مربع کامل نیست. زیرا $4796425000=4796425\times10^3$، واضح است که با وجود توان فرد، عدد مذکور مربع کامل نیست.

هشدار: عددی که به تعدادی زوج رقم صفر ختم می‌گردد، ممکن است مربع کامل باشد یا نباشد.

برای نمونه: عدد ۱۰۰ مربع کامل است، اما عدد ۲۰۰ مربع کامل نیست.

۲) هیچ مربع کاملی به ارقام ۲،۳،۷ و ۸ ختم نمی‌گردد.

برای نمونه: اعداد ۱۸۹۴۳۷۹۲، ۸۲۶۷۹۷۳، ۱۷۴۸۱۹۳۴۷ و ۱۷۹۶۴۸۹۶۸ مربع کامل نیستند، زیرا به ۲،۳،۷ و ۸ ختم شده‌اند.

دلیل درستی یادآوری ۲، این است که رقم یکان عدد طبیعی a^2 همان رقم یکان مربع رقم یکان a است.

برای نمونه: اگر رقم یکان عدد طبیعی a برابر ۹ است، رقم یکان a^2 برابر با رقم یکان 9^2، یعنی برابر ۱ است. به‌طور کلی به جدول مقابل دقت کنید:

رقم یکان a	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
رقم یکان a^2	۰	۱	۴	۹	۶	۵	۶	۹	۴	۱

(همان‌طور که مشاهده می‌شود، رقم یکان a^2، نمی‌تواند ۲،۳،۷ و ۸ باشد.)

۳) هیچ مربع کاملی به‌صورت $3k+2$ نیست $(k\in\mathbb{Z})$.

زیرا می‌دانیم هر عدد صحیح در تقیسم بر ۳، به‌صورت $3k$ یا $3k\pm1$ است. پس اگر $a\in\mathbb{Z}$ عددی دلخواه باشد، آن‌گاه:

$$a=3k\Rightarrow a^2=9k^2 \quad , \quad a=3k\pm1\Rightarrow a^2=9k^2\pm6k+1=3(\underbrace{3k^2\pm2k}_{k'})+1=3k'+1$$

واضح است که a^2 به‌صورت $9k^2$ یا $3k'+1$ است و هیچ‌گاه به شکل $3k+2$ قابل نمایش نیست.

برای نمونه: برای بررسی مربع کامل بودن یا نبودن عدد ۱۲۷۹۲۴۱، از آن‌جایی که این عدد فرد است، ابتدا بررسی می‌کنیم که به‌صورت $8q+1$ هست یا نه. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، فقط سه رقم سمت راست این عدد را بر عدد ۸ تقسیم می‌کنیم و چون $241=8(30)+1$، پس این عدد به‌صورت $8q+1$ است و در مورد مربع کامل بودن یا نبودن آن چیزی نمی‌توان گفت، اما با توجه به اینکه مجموع ارقام این عدد برابر ۲۶ است و $26=3k+2$، پس این عدد به‌صورت $3k+2$ است و در نتیجه مربع کامل نیست.

راهبرد: برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد طبیعی بر ۳ یا ۹، باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد طبیعی را بر ۳ یا ۹ می‌یابیم.

نتیجه: اگر یک عدد طبیعی و مربع، مضرب ۳ باشد، آن‌گاه مضرب ۹ نیز هست.

به‌عبارت دیگر اگر یک عدد طبیعی، مضرب ۳ باشد و مضرب ۹ نباشد، آن‌گاه مربع کامل نیست.

برای نمونه: عدد ۲۹۳۴۶۱۵۹ مضرب ۳ است (زیرا مجموع ارقام این عدد ۳۹ می‌باشد، که بر ۳ بخش‌پذیر است) اما مضرب ۹ نیست (چرا؟) لذا مربع نیست.

۱۱۳. گزینه ۲ گزارهٔ «بعضی از انسان‌ها با هوش‌اند»، به‌صورت $\exists x\in H ; I(x)$ در می‌آید،که نقیض آن عبارت است از:

$\forall x\in H ; \sim I(x)$

۱۱۴. گزینه ۳ نقیض گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ عبارت است از $p\wedge \sim q$، پس نقیض گزارهٔ شرطی داده شده عبارت است از:

$$(\forall x\in\mathbb{R}; x^2>0)\wedge\sim(\exists x\in\mathbb{R}; x^2<0)$$
$$\equiv(\forall x\in\mathbb{R}; x^2>0)\wedge(\forall x\in\mathbb{R}; x^2\ge 0)$$

۱۱۵. گزینه ۴ گزاره‌های «شرایط اقتصادی جامعه بد باشد»، «مردم فقیر می‌شوند» و «همهٔ کارها ناتمام می‌مانند» را به‌ترتیب p، q و r می‌نامیم. در این‌صورت نقیض گزارهٔ $p\Rightarrow(q\vee r)$ موردنظر است، که عبارت است از $p\wedge\sim(q\vee r)\equiv p\wedge\sim q\wedge\sim r$، پس گزینه «۴» قابل قبول است. (توجه کنید که نقیض گزارهٔ «همهٔ کارها ناتمام می‌مانند»، عبارت است از «برخی کارها ناتمام نمی‌مانند»)

۱۱۶. گزینه ۴

$$\sim(\forall n\in\mathbb{N}\ \exists a\in\mathbb{R}; 4<(1+a)^n\le 25)$$
$$\equiv\exists n\in\mathbb{N}\ \forall a\in\mathbb{R};\sim(4<(1+a)^n\le 25)$$
$$\equiv\exists n\in\mathbb{N}\ \forall a\in\mathbb{R};\sim((1+a)^n>4\wedge(1+a)^n\le 25)$$
$$\equiv\exists n\in\mathbb{N}\ \forall a\in\mathbb{R};\sim((1+a)^n>4)\vee\sim((1+a)^n\le 25)$$
$$\equiv\exists n\in\mathbb{N}\ \forall a\in\mathbb{R};((1+a)^n\le 4\vee(1+a)^n>25)$$

۱۱۷. گزینه ۱ زیرا ارزش گزارهٔ $\exists x\in\mathbb{Z}; x^2=16$، درست و ارزش گزارهٔ $\forall x\in\mathbb{N}; x^2>1$ نادرست است (زیرا مثال نقض $x=1$ دارد)، پس این گزارهٔ شرطی نادرست است (توجه کنید گزاره‌های موجود در گزینه‌های «۳» و «۴»، به انتفای مقدم درست‌اند).

۱۱۸. گزینه ۲

$$\sim[(\forall a,b\in\mathbb{Z}; a<b)\Rightarrow(\exists a,b\in\mathbb{Z}; a^2>b^2)]$$
$$\equiv(\forall a,b\in\mathbb{Z}; a<b)\wedge\sim(\exists a,b\in\mathbb{Z}; a^2>b^2)$$
$$\equiv(\forall a,b\in\mathbb{Z}; a<b)\wedge(\forall a,b\in\mathbb{Z}; a^2\le b^2)$$

۱۱۹. گزینه ۴

ترکیب دو شرطی $p\Leftrightarrow q$، زمانی درست است که گزاره‌های p و q هم‌ارز باشند. به بیان دیگر گزاره‌های p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند. معادلهٔ $2^x+1=0$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی فاقد جواب بوده و نادرست است. بنابراین زمانی این گزاره‌نما درست خواهد بود که معادلهٔ $4^x-6(2^x)+8=0$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی جواب نداشته باشد. به بیان دیگر این تساوی نادرست باشد، بنابراین ابتدا باید ریشه‌های این معادله را به‌دست آوریم. داریم:

$$2^x=a\Rightarrow 2^{2x}-6(2^x)+8=0\Rightarrow a^2-6a+8=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=4\\ \text{یا}\\ a=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x=4\\ \text{یا}\\ 2^x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ \text{یا}\\ x=1\end{cases}$$

برای اینکه معادلهٔ موردنظر فاقد جواب باشد، باید $x\in\mathbb{R}-\{1,2\}$ باشد تا گزاره‌نمای دو شرطی، تبدیل به گزاره‌ای درست شود.

۱۲۰. گزینه ۱ در گزینهٔ «۱» داریم:

$y=x+6\Rightarrow$ **به ازای هر x طبیعی، یک مقدار طبیعی برای y به‌دست می‌آید.**

در سایر گزینه‌ها مثال نقض وجود دارد.

۱۲۱. گزینه ۱ **بررسی گزینه‌ها:**

گزینهٔ «۱»: $x^2+2>2x\Rightarrow\underbrace{x^2-2x+1}_{\text{اتحاد}}+1>0\Rightarrow(x-1)^2+1>0$

چون عبارت به‌دست آمده، همواره درست است، پس ارزش این گزارهٔ سوری درست است.

گزینهٔ «۲»: $\frac{x-1}{x}=x\Rightarrow x-1=x^2\Rightarrow x^2-x+1=0\Rightarrow\Delta<0$

این معادلهٔ درجهٔ دوم جواب حقیقی ندارد. پس مجموعه جواب گزاره‌نمای این سور وجودی همواره تهی است.

گزینهٔ «۳»: از آن‌جایی که می‌دانیم $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}:|x+\frac{1}{x}|>2$، پس سور وجودی داده‌شده نادرست است.

گزینهٔ «۴»: به ازای $x=2$ مثال نقض وجود دارد، پس نادرست است.

۱۲۲. گزینه ۳

در مجموعهٔ A چون $x\le 2$ و $x\in\mathbb{N}$ پس $x=1,2$ خواهد بود.

$$x=1\Rightarrow\frac{2^x\times x^2}{x}=\frac{2\times 1}{1}=2$$
$$x=2\Rightarrow\frac{2^x\times x^2}{x}=\frac{2^2\times 2^2}{2}=\frac{16}{2}=8$$

پس $A=\{2,8\}$.

۱۲۳. گزینه ۱ از اینکه $\{1\}\subset A$، نتیجه می‌گیریم $1\in A$، که غلط است، زیرا مجموعهٔ A دارای عضو ۱ نیست.

۱۲۴. گزینه ۳ با توجه به گزینه‌ها، به راحتی دیده می‌شود که یکی از دو گزینهٔ «۳» و «۴» جواب خواهند بود. از طرفی چون $\{a\}\notin C$ پس $A\notin C$.

۱۲۵. گزینه ۲

۱۲۶. گزینه ۳ ابتدا هریک از مجموعه‌های A، B، C و D را با عضوهایشان نمایش می‌دهیم:

$$A=\{m|m\in\mathbb{Z},|m|<2\}\Rightarrow A=\{m|m\in\mathbb{Z}|-2<m<2\}$$
$$=\{-1,0,1\}$$
$$B=\{m|m\in\mathbb{Z},m^3=m\}\Rightarrow B=\{m|m\in\mathbb{Z},m^3-m=0\}$$
$$\Rightarrow B=\{m|m\in\mathbb{Z},m(m^2-1)=0\}=\{-1,0,1\}$$
$$C=\{m|m\in\mathbb{Z},m^2\le 2m\}$$
$$\Rightarrow C=\{m|m\in\mathbb{Z},m^2-2m\le 0\}=\{0,1,2\}$$
$$D=\{m|m\in\mathbb{Z},m^2\le 1\}$$
$$\Rightarrow D=\{m|m\in\mathbb{Z},-1\le m\le 1\}=\{-1,0,1\}$$

بنابراین می‌توان نوشت: $C=E\ ,\ A=B=D$

۱۲۷. گزینه ۲

$$\frac{2^{n+5}}{2^n}=2^5=32$$

۱۲۸. گزینه ۲ عضو a حضور دارد، پس ۳ عضو باقی مانده، دارای $2^3=8$ زیرمجموعه‌اند.

۱۲۹. گزینه ۴ چون $A-\{B\}=\{a,b,\{a\}\}$، پس یک مجموعهٔ ۳ عضوی دارای $2^3=8$ زیرمجموعه است، که غیر از مجموعهٔ تهی، ۷ زیرمجموعهٔ غیر تهی دارد.

۱۳۰. گزینه ۲ عضو b کنار می‌رود و چون عضو a همواره حضور دارد، لذا تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ $\{c,d,e\}$ را می‌یابیم که برابر با $8=2^3$ است.

۱۳۱. گزینه ۲

$$2^{n+2}=2^n+96\Rightarrow 2^2\times 2^n-2^n=96\Rightarrow 2^n(2^2-1)=96$$
$$\Rightarrow 2^n\times 3=96\Rightarrow 2^n=32\Rightarrow n=5$$

۱۳۲. (گزینه ۱) فرض می‌کنیم A دارای n عضو باشد، بنابراین دارای 2^n زیر مجموعه است. از طرفی با حذف ۲ عضو از این n عضو، مجموعهٔ A دارای 2^{n-2} زیرمجموعه خواهد بود، پس:

$$2^{n-2}=2^n-384 \xrightarrow{\text{تست گزینه ها}} n=9$$

۱۳۳. (گزینه ۱)

$$2^n=62+\frac{1}{4}\times 2^{n-3} \xrightarrow{\text{تست گزینه ها}} n=6$$

۱۳۴. (گزینه ۱) توجه کنید که مجموعهٔ داده‌شده یک مجموعهٔ ۳ عضوی است، زیرا $\{a,b\}=\{b,a\}$ و مجموعه، عضو تکراری ندارد.

$$\{a,b,\{a,b\},\{b,a\}\}=\{a,b,\{a,b\}\}$$

پس با حذف عضو $\{a,b\}$، ۲ عضو دیگر می‌ماند:

$$\{a,b,\cancel{\{a,b\}}\}\xrightarrow{\text{تعداد زیرمجموعه‌ها}}2^2=4$$

۱۳۵. (گزینه ۳)

$$x^2-3x+2=0\xrightarrow{\text{تجزیه}}(x-1)(x-2)=0\Rightarrow x=1,2$$

پس $B=\{1,2\}$. بنابراین $A-B$ دارای ۳ عضو است.

$$A-B=\{\{1\},\{1,2\},\{2\}\}$$

در نتیجه $8=2^3$ زیرمجموعه دارد که به جز تهی، تعداد ۷ زیرمجموعهٔ ناتهی باقی می‌ماند.

۱۳۶. (گزینه ۴) باتوجه به مجموعه‌های داده شده داریم:

$$A-B=\{1,2,\{1,2,3\}\}-\{1,2,3,\{1,2\}\}=\{\{1,2,3\}\}=\{C\}$$

$$B-C=\{1,2,3,\{1,2\}\}-\{1,2,3\}=\{\{1,2\}\}\neq\varnothing$$

۱۳۷. (گزینه ۲) زیرا خودِ A در C دیده نمی‌شود.

۱۳۸. (گزینه ۱) زیرا $2\in B$ و $2\notin C$، پس $B\not\subset C$.

۱۳۹. (گزینه ۴)

۱۴۰. (گزینه ۲)

$$\begin{cases}A\subset B\Rightarrow A\cup B=B\\ A\subset C\Rightarrow A\cup C=C\end{cases}\Rightarrow (A\cup B)\cap(A\cup C)=B\cap C=B$$

(زیرا $B\subset C$)

۱۴۱. (گزینه ۳)

$$\begin{cases}B\cap C=C\Rightarrow C\subset B\\ A\cap B=B\Rightarrow B\subset A\end{cases}\Rightarrow C\subset B\subset A$$

۱۴۲. (گزینه ۲)

چون $(A\cup B)\subset\varnothing$ و $\varnothing\subset(A\cup B)$، پس $A\cup B=\varnothing$ لذا $A=B=\varnothing$.

۱۴۳. (گزینه ۳) چون با اضافه کردن یک عضو از A به B، تعداد اعضای B تغییری نکرده است پس این عضو در داخل B هم بوده است. یعنی:

$$A\cap B\neq\varnothing$$

۱۴۴. (گزینه ۲) چون با اضافه شدن ۱۰ عضو به مجموعهٔ A، به اشتراک آن‌ها، ۹ عضو اضافه شده است، پس فقط یک عضو از این ۱۰ عضو در B نبوده است. در نتیجه به $A\cup B$، فقط یک عضو اضافه خواهد شد و در نتیجه دارای ۲۶عضو خواهد بود.

۱۴۵. (گزینه ۳) چون $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}, A\cap B=\{2,3,4\}$ پس:

$$\{2,3,4\}\subseteq X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$$

یعنی X حتماً شامل عضوهای ۴ و ۳ و ۲ است. لذا X می‌تواند یکی از مجموعه‌های زیر باشد: $\{2,3,4\},\{1,2,3,4\},\{2,3,4,5\},\{1,2,3,4,5\}$

۱۴۶. (گزینه ۱) با توجه به خاصیت جذب داریم:

$$A'\cap[\underbrace{(B\cap A)\cup B}_{B}]=A'\cap B$$

۱۴۷. (گزینه ۴) چون $k>n$ پس $\{1,2,\dots,n\}\subset\{1,2,\dots,k\}$ و در نتیجه به ازای هیچ مجموعهٔ دلخواه X، تساوی $\{1,2,\dots,k\}\cup X=\{1,2,\dots,n\}$ برقرار نخواهد بود.

۱۴۸. (گزینه ۲) چون $\{1,2,\dots,n\}\cup X=\{1,2,\dots,n\}$ پس باید X یکی از زیر مجموعه‌های $\{1,2,\dots,n\}$ باشد. بنابراین 2^n حالت وجود دارد.

۱۴۹. (گزینه ۲) چون $k<n$ پس برای اینکه تساوی موردنظر برابر باشد، باید مجموعهٔ X شامل $\{k+1,\dots,n\}$ باشند. از طرفی این مجموعه می‌تواند هریک از اعداد $\{1,\dots,k\}$ را نیز در بر بگیرد. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1,\dots,k\}$، جواب مسئله خواهد بود، زیرا در هریک از این زیر مجموعه‌ها می‌توان $\{k+1,\dots,n\}$ را قرار داد و در نتیجه مجموعهٔ حاصل، $\{k+1,\dots,n\}$ را در برداشته و می‌توانیم از آن به جای X در تساوی استفاده کنیم. از طرفی تعداد زیر مجموعه‌های $\{1,\dots,k\}$ برابر با 2^k است.

۱۵۰. (گزینه ۳) واضح است که $A_8=\{8,9,\dots,17\}$ و در نتیجه داریم:

$$A_3\cap A_4\cap\dots\cap A_8$$
$$=\{3,4,\dots,12\}\cap\{4,5,\dots,13\}\cap\dots\{8,9,\dots,17\}=\{8,9,10,11,12\}$$

۱۵۱. (گزینه ۳) با قرار دادن $n=1,2,3,4$ داریم:

$$A_1=(-1,2)\ ,\ A_2=(2,4)\ ,\ A_3=(-3,6)\ ,\ A_4=(4,8)$$

در نتیجه $\bigcup_{n=1}^{4}A_n=(-3,8)$، که اعداد صحیح متعلق به آن عبارت‌اند از:

$$\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

۱۵۲. (گزینه ۱)

$$A_4=(-\frac{2}{4},\frac{4-2}{4})=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

$$A_5=(-\frac{2}{5},\frac{5-2}{5})=(-\frac{2}{5},\frac{3}{5})$$

$$A_6=(-\frac{2}{6},\frac{6-2}{6})=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

$$A_7=(-\frac{2}{7},\frac{7-2}{7})=(-\frac{2}{7},\frac{5}{7})$$

$$A_8=(-\frac{2}{8},\frac{8-2}{8})=(-\frac{1}{4},\frac{3}{4})$$

واضح است که بزرگ‌ترین عدد در بین اولی‌ها، $-\frac{1}{4}$ و کوچک‌ترین عدد در بین دومی‌ها $\frac{1}{2}$ است. پس $\bigcap_{n=4}^{8}A_n=(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$.

۱۵۳. (گزینه ۴) واضح است که $A_3=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ و $A_6=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$، داریم: $(A_3\cup A_6)-A_3$

$$=[\underbrace{(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})\cup(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})}_{(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})}]-(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})=[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$$

۱۵۴. (گزینه ۳)

$$A_1=\{m\in\mathbb{Z}\mid m>-1, 2^m\leq 2(1)\}=\{0,1\}$$

$$A_4=\{m\in\mathbb{Z}\mid m>-4, 2^m\leq 2(4)\}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$$

$$A_8=\{m\in\mathbb{Z}\mid m>-8, 2^m\leq 2(8)\}$$
$$=\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$$

۲۶۸. گزینه ۱

$$(A-B)-C=A-(B-C)\Rightarrow (A\cap B')\cap C'=A\cap (B\cap C')'$$

$$\Rightarrow (A\cap B')\cap C'=A\cap (B'\cup C)$$

$$\Rightarrow C'\cap (A\cap B')=(A\cap B')\cup (A\cap C)$$

اکنون دو طرف را با $(A\cap C)$ اشتراک می‌گیریم:

$$(A\cap C)\cap [C'\cap (A\cap B')]=(A\cap C)\cap [(A\cap B')\cup (A\cap C)]$$

$$\xrightarrow{\text{جذب}} \underbrace{\underbrace{[(A\cap C)\cap C']}_{\varnothing}\cap (A\cap B')}_{\varnothing}=A\cap C$$

۲۶۹. گزینه ۴

$$A\times B=B\times A\Rightarrow A=B\Rightarrow \begin{cases} ۲^{۳x-۲y}=۵۱۲=۲^{۹} \\ ۳^{۲x+y}=۸۱=۳^{۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x-۲y=۹ \\ ۲x+y=۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} (x=\frac{۱۷}{۷})\wedge (y=\frac{-۶}{۷})$$

$$\Rightarrow ۵x+۴y=۵(\frac{۱۷}{۷})+۴(\frac{-۶}{۷})=\frac{۶۱}{۷}$$

۲۷۰. گزینه ۲

واضح است که $A\cap B=\varnothing$، پس $(A\cap B)\times A=\varnothing\times A=\varnothing$ لذا صفر عضو دارد.

۲۷۱. گزینه ۴

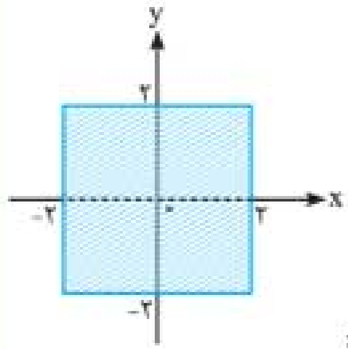
نکته:

$$n[(A\times B)\cup (B\times A)]=۲n(A)n(B)-[n(A\cap B)]^{۲}$$

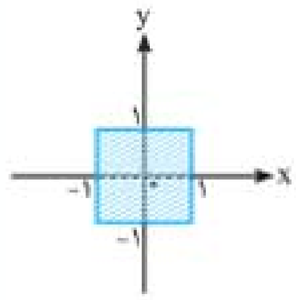
می‌دانیم: $A\cap B=\{۳,۴\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲$

پس: $n[(A\times B)\cup (B\times A)]=۲\times ۴\times ۳-۲^{۲}=۲۴-۴=۲۰$

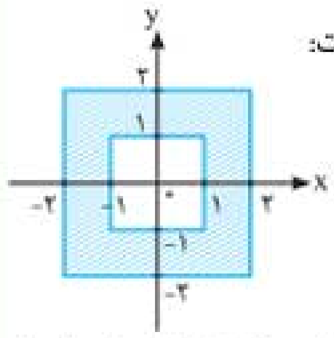
۲۷۲. گزینه ۴ نمودار مختصاتی $A^{۲}$ به‌صورت مقابل است:



نمودار مختصاتی $B^{۲}$ به‌صورت زیر خواهد بود:



در نتیجه نمودار $A^{۲}-B^{۲}$ به‌صورت مقابل است:



۲۷۳. گزینه ۱ «تاس برای اولین بار در مرتبهٔ سوم ۶ بیاید» یعنی دو بار اول غیر ۶ ظاهر شده است و فقط در بار سوم ۶ آمده است. پس:

$A=\{(۱,۱,۶),(۱,۲,۶),(۱,۳,۶),(۱,۴,۶),(۱,۵,۶),(۲,۱,۶),(۲,۲,۶),$
$(۲,۳,۶),(۲,۴,۶),(۲,۵,۶),),(۳,۱,۶),(۳,۲,۶),(۳,۳,۶),(۳,۴,۶),$
$(۳,۵,۶),(۴,۱,۶),(۴,۲,۶),(۴,۳,۶),(۴,۴,۶),(۴,۵,۶),(۵,۱,۶),$
$(۵,۲,۶),(۵,۳,۶),(۵,۴,۶),(۵,۵,۶)\}$

«تاس تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید» یعنی دو بار اول ۶ و بار سوم غیر ۶ یا دو بار اول و سوم ۶ و بار دوم غیر ۶ یا دو بار دوم و سوم ۶ و بار اول غیر ۶ ظاهر شده است. بنابراین:

$B=\{(۶,۶,۱),(۶,۶,۲),(۶,۶,۳),(۶,۶,۴),(۶,۶,۵),(۶,۱,۶),$
$(۶,۲,۶),(۶,۳,۶),(۶,۴,۶),(۶,۵,۶),(۱,۶,۶),(۲,۶,۶),$
$(۳,۶,۶),(۴,۶,۶),(۵,۶,۶)\}$

واضح است که $A\cap B=\varnothing$، پس دو پیشامد A و B ناسازگارند.

از آن‌جایی‌که $A\cap B=\varnothing$، پس $A-B=A$ و $B-A=B$، لذا دو پیشامد A و B' و نیز دو پیشامد A' و B سازگارند (چرا؟).

۲۷۴. گزینه ۳ فضای نمونه‌ای شامل ارقام ۱,۲,...,۹ است و پیشامد مطلوب شامل ارقام ۱,۲,۳,۴,۶,۹ است. پس احتمال موردنظر $\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$ می‌باشد.

۲۷۵. گزینه ۴ واضح است که $n(S)=\binom{۱۰}{۱}=۱۰$. حالت‌های مطلوب ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ است لذا احتمال موردنظر $\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$ است.

۲۷۶. گزینه ۲ احتمال موردنظر عبارت است از:

$$\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۱}{۶}$$

۲۷۷. گزینه ۲ می‌دانیم $n(S)=\binom{۵}{۲}=۱۰$، اما دو رأس مجاور، یعنی دو رأسی که توسط یک ضلع به هم وصل شده باشند، پس اگر یک ضلع از ۵ ضلع را انتخاب کنیم، همانند آن است که دو رأس مجاور انتخاب شده است. $(n(A)=\binom{۵}{۱})$. لذا احتمال مطلوب $\frac{\binom{۵}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$ است.

۲۷۸. گزینه ۴ شش زوج یعنی ۱۲ نفر لذا $n(S)=\binom{۱۲}{۲}=۶۶$. اگر پیشامد مطلوب را A بنامیم، $n(A)=\binom{۶}{۱}=۶$، پس $P(A)=\frac{۶}{۶۶}=\frac{۱}{۱۱}$.

۲۷۹. گزینه ۳ می‌دانیم $n(S)=\binom{۵}{۲}=۱۰$. از طرفی حالت‌های مطلوب $\{۱,۵\}$، $\{۲,۵\}$، $\{۳,۵\}$، $\{۴,۵\}$، $\{۲,۴\}$ و $\{۳,۴\}$ است، پس جواب ۰/۶ می‌باشد.

۲۸۰. گزینه ۱ واضح است که $n(S)=\binom{۶}{۲}=۱۵$. پیشامد مطلوب عبارت است از $A=\{\{۱,۲\},\{۲,۳\},\{۳,۴\},\{۴,۵\},\{۵,۶\}\}$. پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

توجه کنید چون دو مهره را با هم خارج می‌کنیم، ترتیب مهم نیست و پیشامد مطلوب را با مجموعه‌های ۲عضوی تشکیل می‌دهیم.

۲۸۱. گزینه ۲ واضح است که $n(S)=\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}=۲۰$. اکنون پیشامد مطلوب را تشکیل می‌دهیم. چون ترتیب مهم است، از زوج مرتب استفاده می‌کنیم:

$$A=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴)\}$$

پس: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۲۰}=۰/۴$

از طرفی مرکز بازهٔ اطمینان، میانگین نمونه را نشان دهد: پس:

$$\bar{x}=\frac{۱۰۷/۶+۱۰۲/۴}{۲}=۱۰۵$$

بنابراین جواب برابر است با: $\bar{x}+\sigma=۱۰۵+۱۵/۶=۱۲۰/۶$

۷۷۶. گزینه ۴ با توجه به فرض مسئله، بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی میانگین نمرات برابر $[۴۰,۶۰]$ است. با توجه به حجم نمونه که ۴۰۰ است داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{۴۰۰}}=۴۰\Rightarrow \bar{x}-\frac{\sigma}{۱۰}=۴۰\\ \bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{۴۰۰}}=۶۰\Rightarrow \bar{x}+\frac{\sigma}{۱۰}=۶۰\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}$$

$$\bar{x}=۵۰\ ,\ \sigma=۱۰۰\Rightarrow \sigma-\bar{x}=۱۰۰-۵۰=۵۰$$

۷۷۷. گزینه ۴ برآورد بازه‌ای میانگین جامعه با اطمینان بیشتر از ۹۵٪ به‌صورت $[\bar{x}-۲\sigma_{\bar{x}}\ ,\ \bar{x}+۲\sigma_{\bar{x}}]$ است، که در آن $\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. ابتدا انحراف معیار جامعه را به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma^۲=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^۲}{n}=\frac{۶۴}{n}\Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{۶۴}{n}}$$

اکنون انحراف معیار نمونه را می‌یابیم:

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sqrt{\frac{۶۴}{n}}}{\sqrt{\frac{۱۰^۴}{n}}}=\sqrt{\frac{۶۴}{۱۰^۴}}=\frac{۸}{۱۰۰}=۰/۰۸$$

پس برای میانگین جامعه داریم:

$$۴-۲\times(۰/۰۸)\le\mu\le۴+۲\times(۰/۰۸)\Rightarrow ۳/۸۴\le\mu\le۴/۱۶$$

۷۷۸. گزینه ۴ زمانی میانگین همهٔ نمونه‌های ۱۸ تایی با هم برابر است، که حجم نمونه و جامعه یکی باشد، پس در واقع جامعهٔ ما ۱۸ عضوی بوده و فقط یک نمونهٔ ۱۸ عضوی وجود دارد. در نتیجه میانگین جامعه برابر میانگین نمونهٔ ۱۸ تایی و دقیقاً ۵/۲ است.

۷۷۹. گزینه ۴ با توجه به سؤال، میانگین دندان‌های کشیده، پوسیده و پرشده برابر $\bar{x}=۳$ است. اندازهٔ نمونه $n=۴۰۰$ است. مقادیر انحراف معیار را نیز داریم. کران بالای بازه‌های اطمینان ۹۵ درصدی برابر است با:

$$\text{دندان‌های کشیده}\Rightarrow \text{کران بالا}=\bar{x}+\frac{۲\sigma_۱}{\sqrt{n}}=۳+\frac{۲\times۱}{\sqrt{۴۰۰}}=۳/۱$$

$$\text{دندان‌های پوسیده}\Rightarrow \text{کران بالا}=\bar{x}+\frac{۲\sigma_۲}{\sqrt{n}}=۳+\frac{۲\times۲}{\sqrt{۴۰۰}}=۳/۲$$

$$\text{دندان‌های پرشده}\Rightarrow \text{کران بالا}=\bar{x}+\frac{۲\sigma_۳}{\sqrt{n}}=۳+\frac{۲\times۱/۶}{\sqrt{۴۰۰}}=۳/۱۶$$

۷۸۰. گزینه ۲ می‌دانیم بازهٔ اطمینان بیشتر از ۹۵ درصد را می‌توانیم به‌صورت $|\mu-\bar{x}|\le\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$ نشان دهیم، که به $|\mu-\bar{x}|$ خطای برآورد میانگین می‌گوئیم. با توجه به‌صورت سؤال $\sigma^۲=۹\ ,\ |\mu-\bar{x}|\le۰/۲۵$ است، داریم:

$$\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=۰/۲۵\xrightarrow{\sigma=۳}\frac{۲\times۳}{\sqrt{n}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sqrt{n}=۲۴\Rightarrow n=۵۷۶$$

۷۸۱. گزینه ۴ طول بازهٔ اطمینان میانگین با اطمینان بیش از ۹۵٪ برابر $\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}$ می‌باشد. می‌دانیم $\sigma^۲=\frac{۳۶}{۲۵}$ در نتیجه $\sigma=\frac{۶}{۵}$. داریم:

$$\frac{۴\sigma}{\sqrt{n}}\le۰/۰۵\Rightarrow\frac{۴\times\frac{۶}{۵}}{\sqrt{n}}\le\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow\frac{۲۰\times۲۴}{۵}\le\sqrt{n}$$

$$\Rightarrow۹۶\le\sqrt{n}\Rightarrow۹۱۲۶\le n$$

۷۸۲. گزینه ۴ با توجه به فرض $\mu=۹۰\ ,\ \sigma=۱/۲$ و $n=۶۴$. می‌دانیم $\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$، بنابراین:

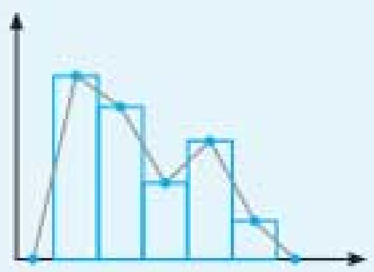
$$\bar{x}-\frac{۲\times۱/۲}{\sqrt{۶۴}}\le۹۰\le\bar{x}+\frac{۲\times۱/۲}{\sqrt{۶۴}}\Rightarrow\bar{x}-۰/۳\le۹۰\le\bar{x}+۰/۳$$

$$\Rightarrow۸۹/۷\le\bar{x}\le۹۰/۳$$

بنابراین احتمال اینکه $\bar{x}<۸۲$ شود، تقریباً برابر صفر است.

۷۸۳. گزینه ۳

راهبرد: برای رسم نمودار چندبر فراوانی از روی نمودار بافت نگاشت، وسط ضلع بالایی مستطیل‌ها را به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف نمودار را به محور x ها وصل می‌کنیم.

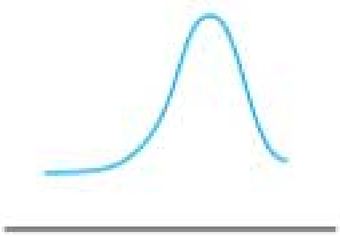


اگر حجم نمونه را زیاد کنیم، معمولاً طول دسته‌ها را کوچک‌تر می‌کنیم. نمودار چندبر فراوانی به یک از صورت‌های زیر در می‌آید:

نرمال

یکنواخت

نامتقارن
(چوله)



نامتقارن
(چوله)

راهبرد: اگر حجم نمونه زیاد باشد $(n\ge۳۰)$ بدون توجه به نمودار چندبر فراوانی جامعه، نمودار چندبر فراوانی بافت نگاشت برآوردهای میانگین به‌صورت نرمال است.

۷۸۴. گزینه ۴ خطای برآورد بازه‌ای برابر $|\mu-\bar{x}|$ است، که حداکثر مقدار آن برابر $\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\text{حداکثر خطا}=\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{۲\sigma}{\sqrt{۶۲۵\sigma^۲}}=\frac{۲\sigma}{۲۵\sigma}=\frac{۲}{۲۵}=۰/۰۸=٪۸$$

۷۸۵. گزینه ۱ با توجه به بازه اطمینان ۹۵٪ داریم:

$$\begin{cases}\bar{x}-\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=۴۰\\ \bar{x}+\frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=۶۰\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}\bar{x}=۵۰\ ,\ \frac{۲\sigma}{\sqrt{n}}=۱۰$$

با توجه به فرض مسئله $n=۱۶$ است و داریم: $\frac{\sigma}{\sqrt{۱۶}}=۵\Rightarrow\sigma=۲۰$

واریانس جامعه ۴ برابر واریانس نمونه است، یعنی:

$$\sigma^۲=۴\sigma_{\bar{x}}^{\ ۲}\Rightarrow\sigma=۲\sigma_{\bar{x}}\Rightarrow\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{۲}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰$$

حال با داشتن میانگین نمونه $(\bar{x})$ و انحراف معیار نمونه $(\sigma_{\bar{x}})$، ضریب تغییرات آن‌ها را به‌دست می‌آوریم: $C.V=\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}=\frac{۱۰}{۵۰}=\frac{۱}{۵}=۰/۲$